بهینه سازی
مقدمات

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

اعلانات

فلچر ۱۹۸۷

- میدان بهینه‌سازی به مثابه
  - «ترکیب سحرانگیز نظر و رایانش، مکاشفه و دقت»

بهینه‌سازی

فرایند یافتن «بهترین»

- بیشترین یا بیشینهٔ دخل
- کمترین یا کمینهٔ خرج

بهینه

- به معنای «بیشینه» یا «کمینه»
- اصطلاحی فنی
- اندازه‌گیری کمی

بهینه‌سازی

بشر بهینه عمل می‌کند

- سرمایه‌گذاران
- سازندگان
- مهندسان

طبیعت بهینه عمل می‌کند

- سیستم‌های فیزیکی
- مولکول‌ها
- اشعه نوری

مهم در تصمیم و تحلیل

حل مسائل بهینه‌سازی

استفاده فراوان در علم و مهندسی و اقتصاد و صنعت

مقاطع مورداستفاده

- مدل‌سازی، تعیین مشخصات، و طراحی ابزارها و مدارها و سیستم‌ها
- طراحی ساختارها و ساختمان‌ها
- کنترل فرایند
- نظریه تخمین، برازش منحنی، حل دستگاه معادلات
- پیش‌بینی، زمان‌بندی تولید، کنترل کیفیت
- نگهداری و تعمیر
- شبکه‌های عصبی و سیستم‌های تطبیقی
- بازارهای مالی

یادگیری توانائی‌ها و محدودیت‌ها منجر به

- فهم بهتر تاثیر آن در حوزه‌های مختلف

ریشه در حساب تغییرات

- اویلر و لاگرانژ

معمولا معروف به برنامه‌ریزی ریاضیاتی

- دهه بیست شمسی توسعه برنامه‌ریزی خطی

بهینه‌سازی

مسائل واقعی

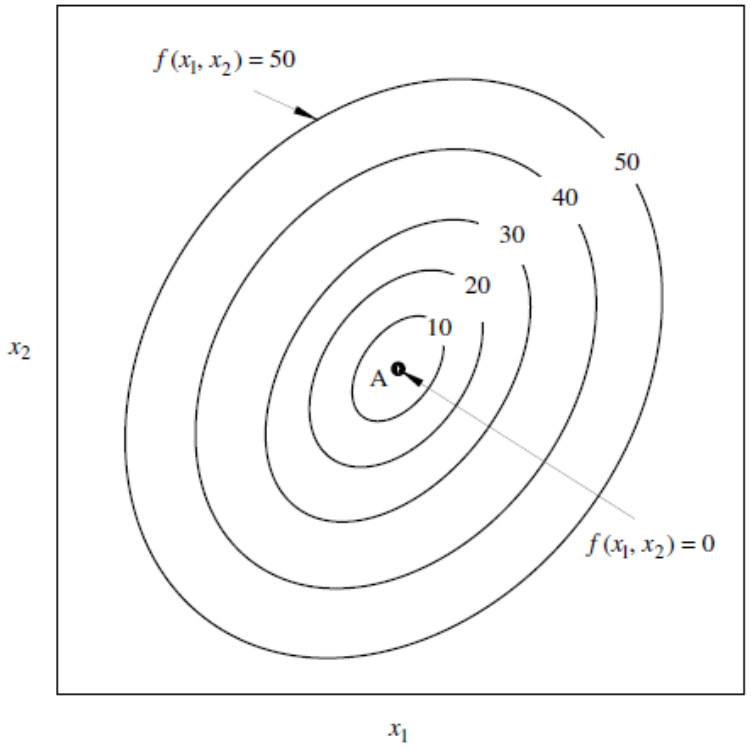
- دارای انواع حل‌ها
- معمولا تعداد بی‌نهایت پاسخ
  - بهینه‌سازی با یافتن بهترین پاسخ
- در صورت تک پاسخی بودن
  - بهینه‌سازی بی‌معنی

بهینه‌سازی- انواع حل

روش‌های کلی

- روش‌های تحلیلی
- روش‌های گرافیکی
- روش‌های آزمایشی
- روش‌های عددی

بهینه‌سازی- انواع



روش‌های کلی

- روش‌های تحلیلی
  - مبتنی بر حسابان
  - ابتدا توضیح ریاضی مسئله
  - عدم نیاز به رایانه
  - سخت جهت اعمال بر مسائل سخت غیرخطی و یا متغیرهای فراوان
- روش‌های گرافیکی
  - رسم تابع
  - چند متغیر؟!
    - رسم تابع بر اساس تک متغیر مستقل
    - ترازبندی: مجموعه نقاط (x_1,x_2)با $f(x_1,x_2)$ برابر
    - ناکارآمد یا غیرممکن برای تعداد متغیرهای بیشتر

بهینه‌سازی- انواع

- روش‌های آزمایشی
  - آزمایش تک به تک متغیرها
  - امکان رسیدن به بهینه یا نزدیک-بهینه
  - امکان رسیدن به جواب‌های نامطمئن
    - چرا؟
  - تعامل چند متغیر با یکدیگر و نیاز به آزمایش همزمان آنها
- روش‌های عددی
  - مهم‌ترین روش عمومی
  - استفاده از رویه‌های مرحله به مرحله (تکراری)
  - شروع از حدسی اولیه
  - پایان با رسیدن به ملاک همگرائی
    - مثال؟
  - مورد استفاده جهت حل مسائل پیچیده
  - حل‌ناپذیر تحلیلی
  - برنامه‌پذیری رایانه‌ای راحت
  - روش‌های غالب

بهینه‌سازی- انواع

برنامه‌ریزی ریاضیاتی

- پارادایم حاکم بر نظر و عمل روش‌های بهینه‌سازی عددی

شامل

- برنامه‌ریزی خطی
- برنامه‌ریزی عدد صحیح
- برنامه‌ریزی غیرخطی
- برنامه‌ریزی پویا

بهینه‌سازی - مختصر

جهت استفاده

- نیاز به مشخص کردن مقصود (هدف)
- «اندازه‌گیری کمی کارکرد سیستم تحت مطالعه»
- مثال
  - سود
  - زیان
  - انرژی پتانسیل
- نگاشت به عددی
  - نمایشگر یک کمیت یا ترکیبی از چند کمیت
- هدف وابسته به مشخصه‌های خاص از سیستم
  - متغیرها، مجهول‌ها
- مقصود
  - یافتن مقادیر بهینه‌ساز هدف

بهینه‌سازی – مختصر - *ادامه*

مقصود

- یافتن مقادیر متغیرها جهت بهینه‌سازی هدف

معمولا دارای حد و حدود

- مثال
  - مقادیر نامنفی چگالی الکترون در مولکول
  - میزان بهره

بهینه‌سازی – مدل‌سازی

فرایند مشخص کردن هدف، متغیرها، محدویت‌های مسئلهٔ معرفی شده

قدم اول
- ایجاد مدل مناسب

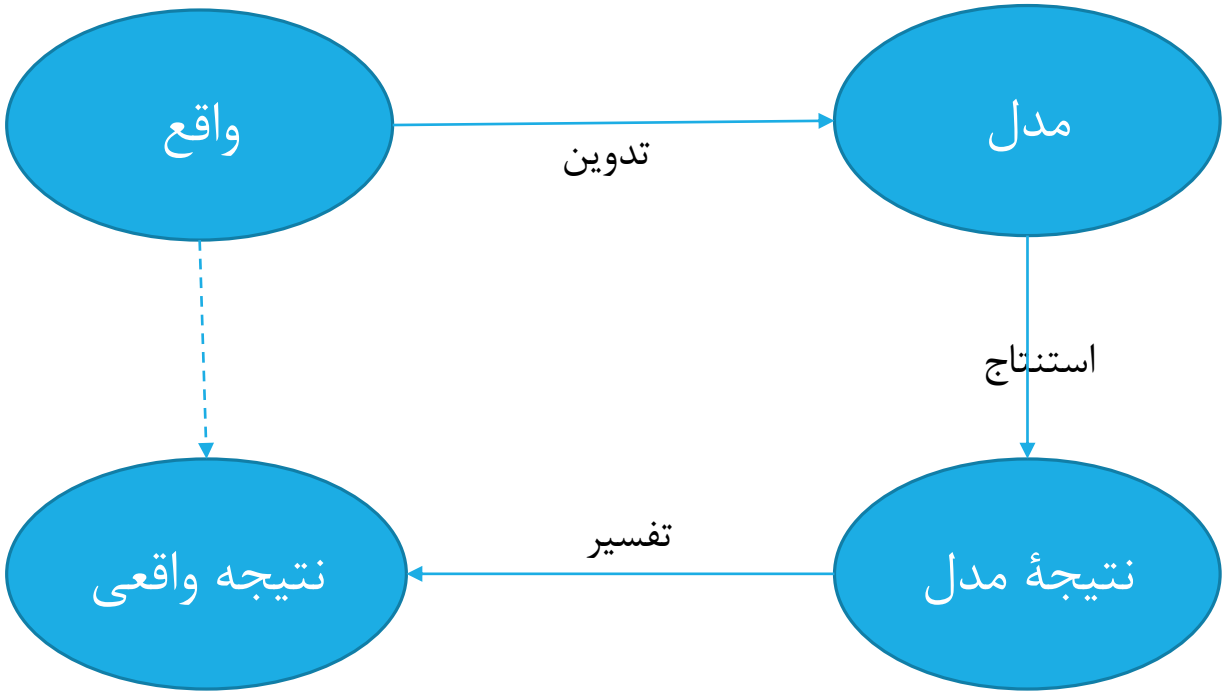
نمایش ساده شده چیزی حقیقی
- چرا؟

انگیزه‌های مختلف
- کمتر کردن پیچیدگی
- فهم مسئله
- یافتن راحت‌تر حل

ساده‌انگاری
- عدم نمایش درست مسئله

زیادی سخت
- حل مشکل اگر نه غیرممکن

مدل‌بندی - *ادامه*



مدل‌بندی - *ادامه*

مسئله در محیط واقع

تدوین مدل

- چه جنبه‌هائی در نظر گرفته می‌شود
- چه جنبه‌هائی نادیده گرفته می‌شود
- مفروضات
- نوع مدل

استنتاج

- حل معادلات
- الگوریتم
- منطق

تفسیر

- ترجمه به محیط واقع

بهینه‌سازی – الگوریتم بهینه‌سازی

جهت یافتن راه‌حل

معمولا با رایانه

الگوریتم واحد و جامع؟

- خیر
- قضیهٔ «نبود ناهار مفت»

مجموعه الگوریتم‌ها

سعی بر انطباق الگوریتم با مسئلهٔ خاص

انتخاب الگوریتم درست وظیفهٔ کاربر

تاثیر بر سرعت راه‌حل

- حتی بر یافتن راه‌حل

بهینه‌سازی – شرایط بهینگی

پس از اعمال الگوریتم روی مدل

نیاز به بررسی یافتن درست راه‌حل

وارسی مجموعه مقادیر یافت‌شدهٔ متغیرها

اطلاع مفید دربارهٔ تخمین فعلی

تحلیل حساسیت

- حساسیت پاسخ به تغییرات در مدل و داده
- با تغییر مدل نیاز به تکرار حل مسئله

تدوین ریاضی

کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی تابع با درنظر گرفتن قیدهایی روی متغیرهای تابع

$\boldsymbol{x}$ بردار متغیرها (یا مجهول‌ها، پارامترها)

f تابع هدف، تابعی (عددی) از **x** که قصد بیشینه یا کمینه کردن آن را داریم

c_i توابع نمایشگر قیدهایی شامل تساوی‌ها و نامساوی‌ها که مقادیر $\boldsymbol{x}$ پاسخ تابع **f** باید آن‌ها را رعایت کنند

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$$

با توجه

$$c_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i \in \mathcal{E}$$
$$c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad i \in \mathrm{I}$$

$\mathcal{E}$ و I مجموعه اندیس‌های قیدهای تساوی و نامساوی

مثال

با

$$((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \text{کـــم}$$

به طوریکه

$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$

مثال

$$\text{کـــم}((x_۱ - ۲)^۲ + (x_۲ - ۱)^۲)$$

به طوریکه

$$x_۱^۲ - x_۲ \leq 0$$
$$x_۱ + x_۲ \leq ۲$$

بازنویسی شبیه تدوین معرفی شده

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 + x_2 \\ -x_1 - x_2 + 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{I} = \{1, 2\}, \quad \mathcal{E} = \emptyset.$$

مثال - *ادامه*

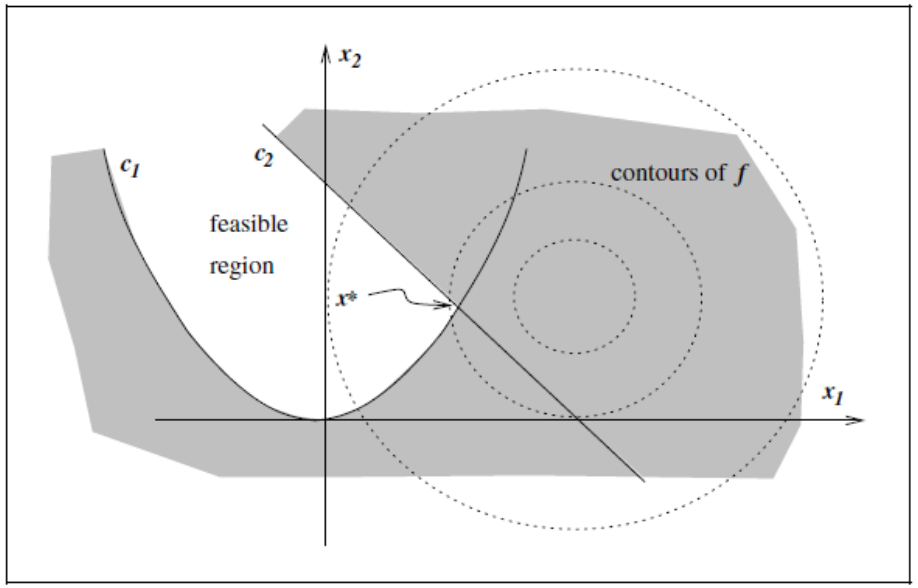
ترازهای تابع هدف

- مجموعه نقاطی که $f(\boldsymbol{x})$ دارای مقدار ثابت

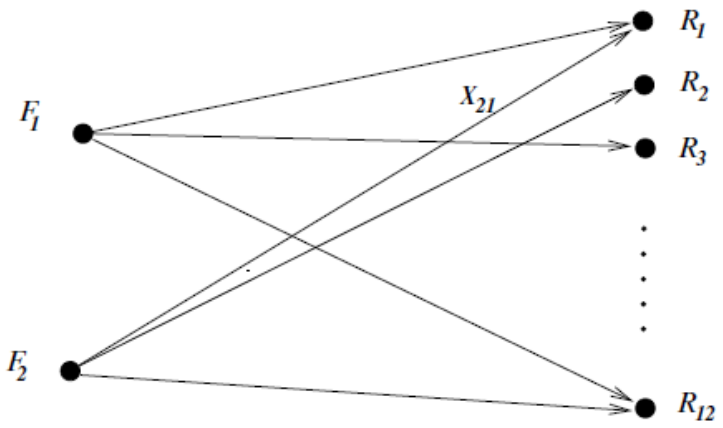
منطقه شدنی (امکان‌پذیر)

- مجموعه نقاطی که تمامی قیدها را رعایت می‌کند.

x^* حل مسئله



مثال ۲- مسئله ترابری



شرکتی

- دو کارخانه F_1 و F_2
- دوازده نمایندگی فروش (خرده‌فروشی) R_1 تا R_{12}
- F_i عرضهٔ a_i تن از محصول در هر هفته
  - ظرفیت
- R_j تقاضای b_j تن از محصول در هر هفته
- c_{ij} هزینه ارسال از F_i به R_j

مسئله: یافتن مقادیر انتقال محصول بین کارخانه‌ها و فروشگاه‌ها جهت برآورده‌سازی نیازها و کمینه‌سازی هزینه‌ها

مثال ۲- مسئله ترابری -*ادامه*

تدوین

$$min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

مثال ۲- مسئله ترابری -*ادامه*

تدوین

$$min \sum_{i} \sum_{j} c_{ij} x_{ij}$$

به طوری‌که

$$\sum_{j=۱}^{۱۲} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = ۱, ۲$$

$$\sum_{i=۱}^{۲} x_{ij} \geq b_j, \qquad j = ۱, \dots, ۱۲$$

مثال ۲- مسئله ترابری -*ادامه*

تدوین

$$min \sum_{i} \sum_{j} c_{ij} x_{ij}$$

به طوری‌که

$$\sum_{j=۱}^{۱۲} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = ۱, ۲$$

$$\sum_{i=۱}^{۲} x_{ij} \geq b_j, \qquad j = ۱, \dots, ۱۲$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = ۱, ۲, j = ۱, \dots, ۱۲$$

بهینه‌سازی- پیوسته در مقابل گسسته

متغیرها مقادیر صحیح
- تعداد نیروگاه در پنج سال آینده
- نیاز یا عدم‌نیاز به کارخانه‌ای خاص در شهری خاص

برنامه‌ریزی عدد صحیح
- بهینه‌سازی گسسته
- یکی از مهم‌ترین جلوه‌های ناکوژی

گاهی اوقات ترکیب اعداد صحیح و اعداد حقیقی
- برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته

بهینه‌سازی پیوسته
- نامتناهی ناشمارا
- حل ساده‌تر
- همواری تابع موجب تصمیم‌گیری ساده‌تر حول نقطهٔ x

بهینه‌سازی- مقید و نامقید

انواع تقسیم‌بندی‌ها
- طبیعت تابع هدف و قیدها (خطی، غیرخطی، کوژ)
- تعداد متغیرها (کم، زیاد)
- همواری تابع (مشتق‌پذیر یا مشتق‌ناپذیر)

دارای قید محدودیت و بدون محدودیت

بهینه‌سازی نامقید $\varepsilon = I = 0$
- امکان تبدیل مسائل مقید به نامقید

بهینه‌سازی مقید
- محدودیت بودجه در اقتصاد
- محدودیت شکل در طراحی
- در اشکال مختلف
  - حد بالا و پائین
  - محدودیت خطی
  - نامساوی‌های غیرخطی

برنامه‌ریزی خطی
- تابع و قیدها توابع خطی
- پرمطلب‌ترین

برنامه‌ریزی غیرخطی
- حداقل یک یا چند قید یا هدف تابع غیرخطی

بهینه‌سازی- محلی و سراسری

بیشتر به دنبال راه‌حلی محلی

- نقطه‌ای با کوچکترین مقدار تابع هدف از میان نقاط امکان‌پذیر همسایه
- به دنبال راه‌حل سراسری نیست
  - نقطهٔ با کمترین مقدار تابع در میان تمامی نقاط امکان‌پذیر
- نیاز به راه‌حل سراسری در بعضی مسائل
  - سختی یافتن و مشخص کردن
- برنامه‌ریزی کوژ
  - برنامه‌ریزی خطی
  - جواب‌های محلی همان جواب‌های سراسری
- مسائل غیرخطی
  - پاسخ محلی لزوما راه‌حل سراسری نیست

بهینه‌سازی- معین و تصادفی

مشخص نبودن کامل مدل در بعضی مسائل

وابستگی به مقادیری نامعلوم در زمان تدوین

- مدل طرح‌های مالی و اقتصادی وابسته به آیندهٔ میزان بهره، تقاضای محصول در آینده، قیمت کالای خام در آینده
- عدم‌قطعیت طبیعی بسیاری از سیستم‌ها

بهتر از «بهترین حدس»

- دستیابی به راه‌حل‌های مفیدتر مدل‌ها با مشارکت دانش افزوده‌ای
- نوشتن چند سناریو و تخمین احتمال هر سناریو
- استفادهٔ بهینه‌سازی تصادفی جهت تخمین «امید» کارکرد مدل

موارد مرتبط

- بهینه‌سازی مقید-شانس: متغیر قیدی را با مقدار مشخصی از احتمال برآورده کند
- بهینه‌سازی استوار: بعضی از قیود باید کاملا رعایت شوند

الگوریتم‌های بهینه‌سازی

تکراری
- مرحله‌به‌مرحله

آغاز با حدس اولیهٔ متغیرهای x

تولید دنباله‌ای از تخمین‌های بهتر

ادامه تا زمان ختم الگوریتم

تمایز الگوریتم‌ها از یکدیگر
- استراتژی حرکت از قدم فعلی به قدم بعدی
- اکثرا استفاده از اطلاعات تابع هدف، قیود، [مشتق اول توابع مذکور]، [مشتق دوم توابع مذکور]

الگوریتم‌های بهینه‌سازی - *ادامه*

انتخاب الگوریتم و همگرائی و سرعت همگرائی

ویژگی‌های الگوریتم مناسب

- استواری
  - اجرای مناسب روی گسترهٔ وسیعی از مسائل
- کارائی
  - عدم نیاز به زمان یا حافظهٔ زیاد جهت محاسبات
- صحت
  - یافتن پاسخ با دقت بالا
  - بدون حساسیت فراوان به خطا در داده یا گردکردن

ناسازگاری اهداف

- همگرائی سریع پاسخ مسئلهٔ غیرخطی نیاز به حافظهٔ زیاد
- روش استوار، کند
- سبک‌سنگین کردن نقشی اساسی در طراحی

عدم توجه به

بهینه‌سازی شبکه

برنامه‌ریزی عدد صحیح

برنامه‌ریزی تصادفی

برنامه‌ریزی ناهموار

بهینه‌سازی سراسری

تدوین ریاضی

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه

$$c_i(x) = 0 \quad i \in \mathcal{E}$$
$$c_i(x) \geq 0 \quad i \in \mathrm{I}$$

$\mathcal{E}$ و I مجموعه اندیس‌های قیدهای تساوی و نامساوی

بهینه‌سازی- انواع

نام	f(x)	c(x)
بهینه‌سازی نامقید	غیرخطی	-
برنامه‌ریزی خطی	خطی	خطی
برنامه‌ریزی درجه دو	درجه دو	خطی
بهینه‌سازی مقید خطی	غیرخطی	خطی
بهینه‌سازی مقید یا بهینه‌سازی غیرخطی	غیرخطی	غیرخطی

Digital filters [7]–[10]: sophisticated filter banks [7] were designed to recognize QRS complexes in which they analyzed the positions and magnitudes of sharp waves and used a special digital band-pass filter to reduce the false detection of ECG signals in the MIT-BIH database [11]. The difference operation method (DOM) [8] scheme including two stages was proposed: the first stage was to find the point R by applying the difference equation operation to an ECG signal, then the second stage looked for the points Q and S based on the point R to find the QRS complex. The work [9] used some special digital filters to detect and classify ECG signal in time or frequency domain. Slope- and peak-sensitive band-pass filters were employed for the detection [10]. The morphological smoothing further improved its performance.

Wavelet transform (WT) [12]–[16]: the transform yields a time-scale representation similar to the time-frequency representation of the short-time Fourier transform (STFT) [12], while the WT uses a set of analyzing functions that allows a variable time and frequency resolution for different frequency bands [13]. By the multiscale feature of WT, the QRS complex can be distinguished from high P or T waves, noise, and baseline drift. The dyadic discrete WT (DWT) was usually implemented using a dyadic filter bank where the filter coefficients were directly derived from the wavelet function [14]. The WT based on the adaptive threshold [15] and WT based on multi-lead ECG [16] were evaluated on the QT database [17].

Adaptive matched filters [18]–[22]: a two-stage successive cancellation algorithm that sequentially separates

Bayesian Real-Time QRS Complex Detector for Healthcare System

ارزیابی

تمرین‌ها

- کتبی
- عملی

تحقیق و پیاده‌سازی

- تحویل تا پایان ۱۵ آذر

امتحان

- میان‌فصل- به محض اتمام مبحث جبر خطی
- پایان‌فصل

- خلق دانش
- کپی‌پیست (گرفتن‌گذاشتن)
- اعلام منابع هر تمرین

مراجع و منابع

[نازه‌دل] J. Nocedal, S. Wright, “Numerical Optimization,” Springer, 2nd ed., 2006.

[کوخن‌داغفا] M. J. Kochenderfer, A. W. Tim, “Algorithms for optimization,” Mit Press, 2019.

[فلچر] R. Fletcher, “Practical Methods of Optimization,” 2nd Ed, 2000.

[آنتونیو] A. Antoniou, W. Lu “Practical Optimization- Algorithms and Engineering Applications,” Springer, 2007.

[لوئنبرگر] D. Luenberger, Y. Ye, “Linear and Nonlinear Programming,” Springer, 4th ed., 2016.

[دایزن‌روث] M. Deisenroth, A. Faisal, C. Ong, “Mathematics for Machine Learning,” Cambridge University Press, 2019.

[چاپرا] S. Chapra, R. Canale, “Numerical Methods for Engineers,” McGraw Hill, 6th ed., 2009.

[دانتزیگ]

منابع کمکی

[جهانشاهلو]

اینترنت و مقالات

[فرهنگستان] واژه‌های مصوب فرهنگستان، دسترسی از طریق مانه

[انوری] ح. انوری و دیگران، «**فرهنگ بزرگ سخن**،» انتشارات سخن، ۱۳۹۲

[رانکوهی] م.ت. روحانی‌رانکوهی، «**فرهنگ داده**،» انتشارات جلوه،

اعلانات

حل تمرین: شایان مجیدی‌فر

نحوه ارسال تمرین‌ها، پروژه‌ها، دیگر موارد

- ا-نامه behinesazi.iasbs.1402@gmail.com
- عنوان: «بهینه‌سازی- تمرین سری اول»
  - فایل متنی: قالب پی‌دی‌اف
  - نام فایل: B-T#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.pdf
  - نام فایل: B-P#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.pdf

- دیگر فایل‌ها
- نام فایل: B-T#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.zip

https://iasbs.ac.ir/~mohsen.hooshmand/courses/0203/1/Behinesazi.html

تمرین بهینه‌سازی با نوشتن کد

فهم الگوریتم

پیچیدگی

حافظهٔ لازم

درخشانی

توانائی بالای برنامه‌نویسی لازم نیست

- ولی میزان محاسباتی لازم است.
- متلب یا پیتون

مطالبی که عرضه خواهد شد

مقدمه

مقدمه ریاضی

- جبر خطی
- حسابان

روش‌های بهینه‌سازی نامقید

روش‌های بهینه‌سازی خطی

روش‌های بهینه‌سازی مقید

روش‌های مکاشفه‌ای

- یا در قالب تدریس یا در قالب ارائه مقاله درسی

مجموعهٔ کوژ

مجموعهٔ کوژ

- $S \in \mathbb{R}^n$
- «قطعه» خطی مستقیم واصل دو نقطه از S
  - کل قطعه خط در S خواهد بود

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S \xRightarrow{\forall \theta \in [0,1]} \boldsymbol{x}_\theta = \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2 \in S$$

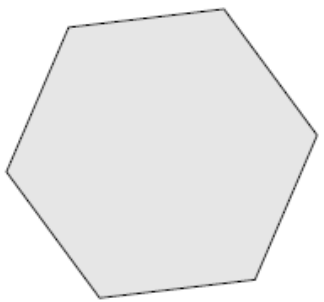
مجموعهٔ کوژ

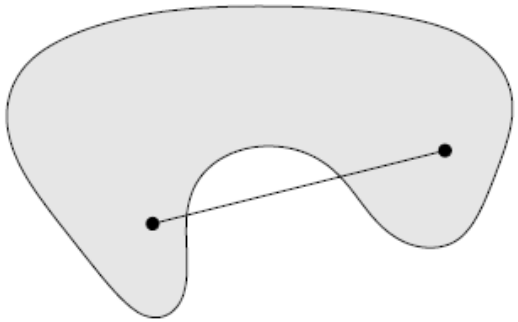
مجموعهٔ کوژ

- $S \in \mathbb{R}^n$
- «قطعه» خطی مستقیم واصل دو نقطه از S
  - کل قطعه خط در S خواهد بود

$$x_1, x_2 \in S \xRightarrow{\forall \theta \in [0,1]} x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S$$

چند نمونه کوژ و ناکوژ





مجموعه کوژ

مجموعه تهی

تک نقطه

تمامی فضای $\mathbb{R}^n$

خط یا تکه خط

ابرصفحه (معادله خطی) $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b$

نیم‌فضا (نامساوی خطی) $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b$

کره $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \leq h$

مخروط کوژ

مثال-پاسخ‌های دستگاه معادلات خطی

$$C = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\},$$

$$A \in R^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in R^m$$

$$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in C \Longrightarrow A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$$

$$A(\theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2) = \theta A\boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)A\boldsymbol{x}_2$$

$$= \theta \boldsymbol{b} + (1-\theta)\boldsymbol{b}$$

$$= \boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2 \in C$$

مجموعه کوژ- *ادامه*

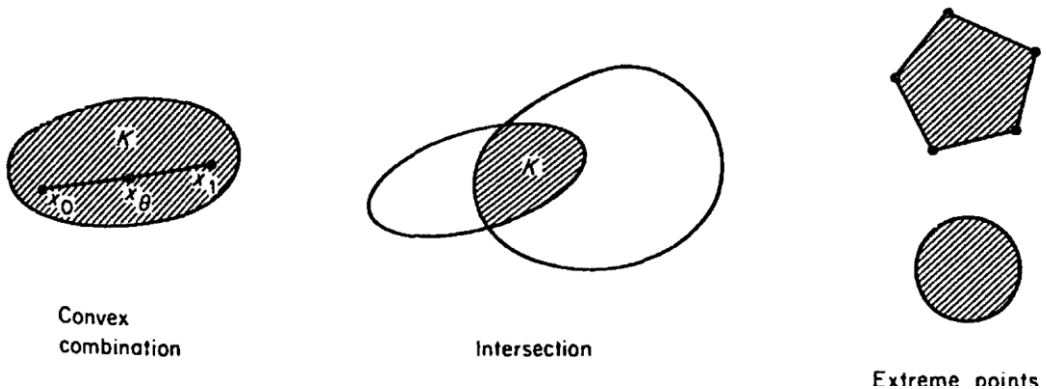
تعمیم تعریف مجموعه کوژ

$$\forall \boldsymbol{x}_i \in S, i = 1, \dots, m \Longrightarrow \boldsymbol{x}_\theta \in S\,, \boldsymbol{x}_\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta_i\, \boldsymbol{x}_i, \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

$\boldsymbol{x}_\theta$ ترکیب کوژ نقاط $\boldsymbol{x}_1$ و $\boldsymbol{x}_2$ و ...

پوسته کوژ

- $\boldsymbol{x}_1$ و $\boldsymbol{x}_2$ و ... و $\boldsymbol{x}_m$
- تمامی نقاط $\boldsymbol{x}_\theta$ مندرج در مجموعه بالا

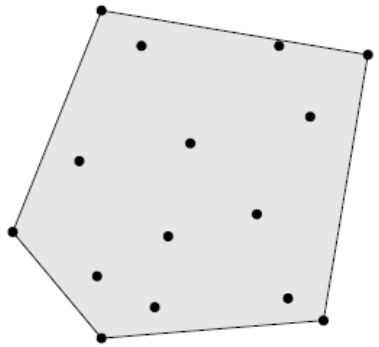


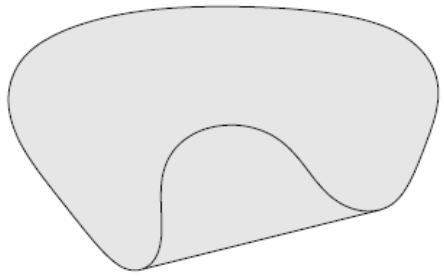
پوستهٔ کوژ

مجموعهٔ ترکیب کوژ تمامی نقاط مجموعه

- $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Koż}\mathfrak{M} = \{\theta_۱\boldsymbol{x}_۱ + \theta_۲\boldsymbol{x}_۲ + \cdots + \theta_m\boldsymbol{x_m} | \boldsymbol{x}_۱, \boldsymbol{x}_۲, \dots, \boldsymbol{x_m} \in \mathfrak{M}, \theta_i \geq 0, \forall i = 1, \dots m, \theta_۱ + \theta_۲ + \cdots + \theta_m = ۱\}$$





تابع کوژ

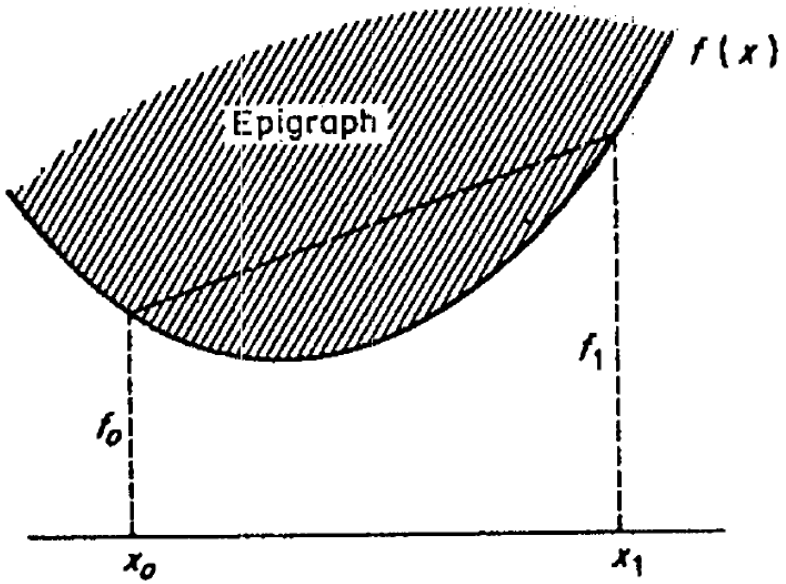
تابع کوژ

- دامنهٔ S کوژ و

$$x_1, x_2 \in S \Longrightarrow f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2), \qquad \forall \theta \in [0,1]$$

- مثال-
  - توپ کوژ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2 \leq 1\}$
  - چندضلعی‌های تعریفی با مساوی‌ها و نامساوی‌های خطی $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | Ax = b, Cx \leq d\}$
  - تابع درجه دو کوژ $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\mathbf{x}$

- تابع اکیدا کوژ: نامساوی اکید با شرط $x_1 \neq x_2, \theta \in (0,1)$



Graph below chord

برنامه‌ریزی کوژ

کوژ بودن تابع هدف

خطی بودن قیدهای مساوی

کاو بودن قیدهای نامساوی

منابع

[نازه‌دل]

[آنتونیو]

[جهان‌شاه‌لو]

[فلچر]

[بوید]